COMPLEJO EDUCACIONAL SAN ALFONSO
FUNDACIÓN QUITALMAHUE
Eyzaguirre 2879 Fono- 22-852 1092 Puente Alto
planificacionessanalfonso@gmail.com
www.colegiosanalfonso.cl

ASIGNATURA: Matemática **NIVEL:** Media

DOCENTE: Úrsula Cortés – Christian Pizarro. **CURSO**: 4° B - C

ACTIVIDAD Nº 2

UNIDAD I: Números.
AE/OA: 01

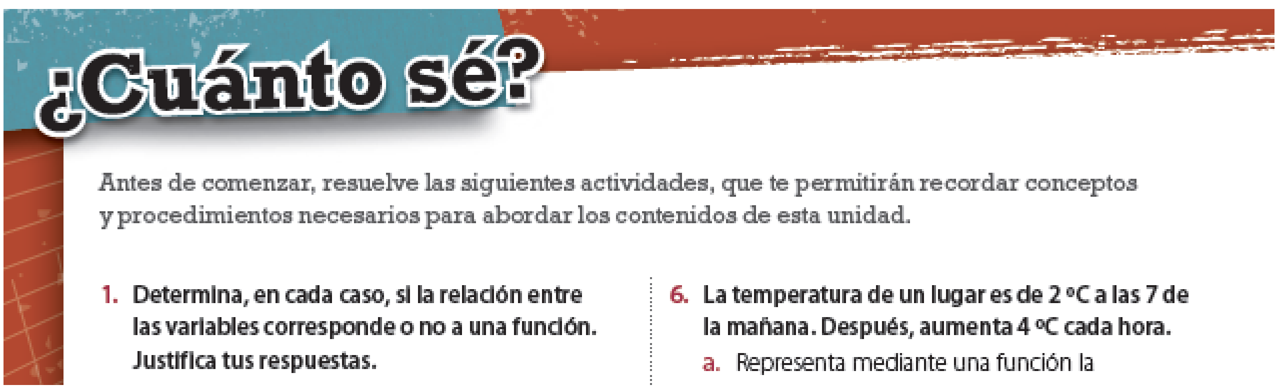
ESTUDIANTE: ____

FECHA DE ENTREGA: 09 de abril.

INSTRUCCIONES:

- **Tema: Funciones**
- Realiza el trabajo en hoja de cuadernillo cuadriculada.
- Para consultas puedes escribirnos a urva1978@gmail.com (Profesora Ursula); profealcuadrado@gmail.com (profesor Christian)

I. Desarrolla los ejercicios 1 al 8 de la página 16 del texto del estudiante.


¿Cuánto sé?

Antes de comenzar, resuelve las siguientes actividades, que te permitirán recordar conceptos y procedimientos necesarios para abordar los contenidos de esta unidad.

1. Determina, en cada caso, si la relación entre las variables corresponde o no a una función. Justifica tus respuestas.

6. La temperatura de un lugar es de 2 °C a las 7 de la mañana. Después, aumenta 4 °C cada hora.
a. Representa mediante una función la

Para cada ejercicio lee las instrucciones que te servirán para responderlos.

1. Explica en cada caso si los ejemplos se pueden expresar como una función. Justifica tu respuesta.
2. Recuerda que la variable independiente es el conjunto X y la variable dependiente es el conjunto Y
3. La función que aparece en el encabezado del ejercicio debes evaluarla con cada valor que aparece en las alternativas. Un ejercicio distinto para cada alternativa.
4. En el conjunto X coloca un valor cualquiera (menor a 180) y en el conjunto Y el valor que te da al reemplazar el valor de x en la función.
5. Explica si la función del gráfico es lineal o afín y por qué.
6. Construye un gráfico, en uno de sus ejes coloca la T° y en el otro el tiempo. Luego responde las preguntas.
7. Construye un gráfico, en un eje coloca el tiempo y en el otro la distancia (en metros). Luego responde las preguntas.
8. En cada alternativa te muestra el valor que se le asigna a la variable “K”. Reemplaza ese valor en cada una de las alternativas y responde.

II. Lee las páginas 28 a la 31 del texto del estudiante y explica con tus propias palabras lo que es:

a. Un función
b. Una función inyectiva (Da un ejemplo)
c. Una función biyectiva (Da un ejemplo)
d. Una función sobreyectiva (Da un ejemplo)

¿Cuánto sé?

Antes de comenzar, resuelve las siguientes actividades, que te permitirán recordar conceptos y procedimientos necesarios para abordar los contenidos de esta unidad.

1. Determina, en cada caso, si la relación entre las variables corresponde o no a una función. Justifica tus respuestas.

a. Un número natural y su sucesor.

b. La longitud del lado de un cuadrado y su área.

c. Un número racional y su representación como fracción.

d. Un punto cualquiera y el camino para llegar desde él hasta un punto distinto.

2. Determina, en cada situación, las variables dependiente e independiente.

a. El volumen de un cubo y la longitud de su arista.

b. La cantidad de kilogramos de manzanas que se compran y el precio total a pagar.

3. Sea $f(x) = x^2 - x - 2$, calcula los siguientes valores de la función.

a. $f(0)$

b. $f(-1) + f(5)$

c. $3 \cdot f(5) - 5 \cdot f(3)$

d. $f(-3)$

e. $f(1) + f(4)$

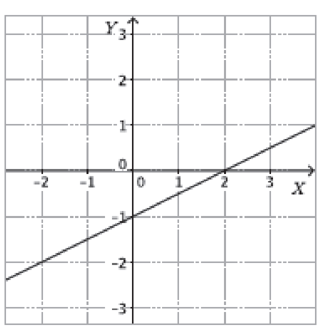
f. $3 \cdot f(2) - 4 \cdot f(7)$

4. En un triángulo isósceles, la medida del ángulo desigual se puede modelar por medio de la función $f(x) = 180 - 2x$, donde x es la medida de uno de los ángulos iguales.

a. ¿Cuál es el dominio de f?, ¿por qué?

b. ¿Cuál es el recorrido de f? Justifica.

5. ¿Qué función está representada en la gráfica?



6. La temperatura de un lugar es de 2 ºC a las 7 de la mañana. Después, aumenta 4 ºC cada hora.

a. Representa mediante una función la situación anterior.

b. La función que modela la situación anterior, ¿es lineal o afín? Justifica tu respuesta.

c. Explica cómo calcularías la temperatura en el lugar al mediodía. ¿Qué valor obtuviste?

7. La siguiente tabla muestra la relación entre el tiempo y la distancia recorrida por un vehículo que se mueve con velocidad constante.

Tiempo (s)	1	3	5	7	9
Distancia recorrida (m)	12	36	60	84	108

a. A partir de los datos de la tabla, construye un gráfico que relacione las variables involucradas.

b. ¿Con qué función modelarías la situación?

c. ¿Cuántos metros habrá recorrido el vehículo al cabo de 1 minuto?

8. Dadas las siguientes funciones exponenciales y logarítmicas, calcula el valor de $f(k)$ en cada caso.

a. $f(x) = 3^x, k = 4$

b. $f(x) = -2^x, k = -3$

c. $f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^x, k = 2$

d. $f(x) = log_3 x, k = 27$

e. $f(x) = log_2 x, k = 64$

f. $f(x) = log_{0,5} x, k = 1$

9. ¿Por qué la gráfica de la función $f(x) = a^x$ siempre pasa por el punto (0, 1)? Explica.

10. La ganancia G, en millones de pesos, que produce un negocio de cuatro hermanos después de t años está dada por la expresión:

$$G(t) = 50 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^t + 12$$

Después de cinco años, los hermanos deciden dividirse en partes iguales su ganancia.

a. ¿Cuánto dinero ganaron en total?

b. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

Función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva

Aprenderé a: identificar funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.

En una biblioteca, todas las revistas están catalogadas por título, además de otros identificadores; igualmente existen títulos con más de una copia.

Considera la función f que tiene como dominio el conjunto de todas las revistas de la biblioteca y como codominio el conjunto de títulos de las revistas catalogadas en la biblioteca.

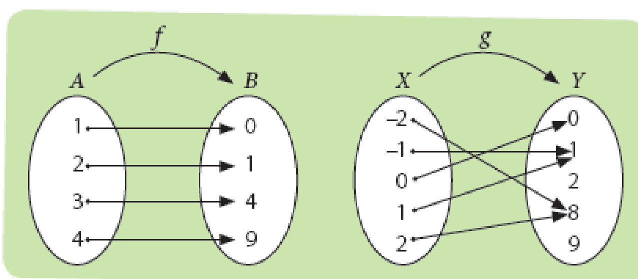
- ¿Por qué f es una función? Argumenta.
- En esta función, ¿cuál es el recorrido?, ¿es igual que el codominio?, ¿por qué?
- ¿Cuántas preimágenes pueden tener los elementos del recorrido?
  Justifica tu respuesta.

Archivo editorial

¿Lo entiendes?
La función del contexto inicial, ¿es inyectiva? Argumenta.

Las funciones pueden tener diversas propiedades, las cuales facilitan su análisis y solución en muchos problemas de aplicación.

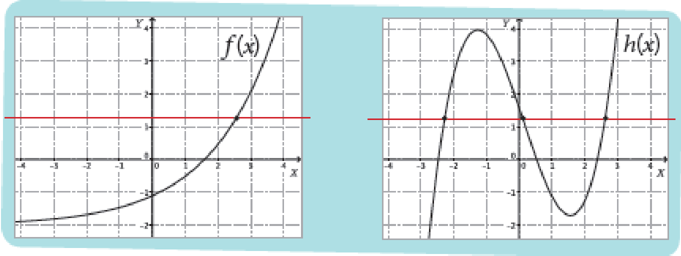
Una **función f** es **inyectiva** o **uno a uno** si para todo par de elementos diferentes del dominio, sus imágenes son diferentes. Es decir, ningún elemento del recorrido es imagen de dos preimágenes diferentes; por ejemplo, sean las funciones $f: A \longrightarrow B$ y $g: X \longrightarrow Y$, dos funciones cuya representación mediante diagramas sagitales es la siguiente:



Tenemos que la función $f: A \longrightarrow B$ es inyectiva porque las imágenes de cada uno de los elementos del dominio son diferentes, en cambio la función $g: X \longrightarrow Y$ no es inyectiva porque $g(-1) = 1$ y $g(1) = 1$, es decir, –1 y 1 tienen la misma imagen.

Para determinar si la función es inyectiva, resulta útil construir su representación gráfica y luego realizar el **criterio de la recta horizontal**, que consiste en trazar rectas horizontales que intersequen a la gráfica. Si la recta corta a la gráfica en un solo punto, la función es inyectiva. En cambio, si la recta interseca a la gráfica en más de un punto, la función no es inyectiva.

Por ejemplo, observa las gráficas de las funciones f y h.

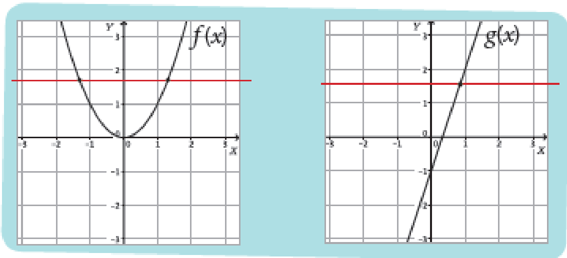


La función f es inyectiva, ya que toda línea horizontal corta la gráfica en un único punto. En tanto, que la función h no es inyectiva, puesto que la recta horizontal dibujada corta a la gráfica de h en tres puntos.

¿Cómo hacerlo?

Sean las funciones $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = x^2$ y $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, con $g(x) = 3x - 1$. Determina si f y g son inyectivas.

Al graficar las funciones f y g, nos queda:



Si te fijas, en el caso de f, la recta horizontal interseca a la curva en dos puntos, por lo tanto, la función no es inyectiva. Por otro lado, en el caso de g, cualquier recta horizontal interseca a la gráfica de la función en un solo punto. Luego g es inyectiva.

Otra manera de resolver el problema es de manera algebraica ya que en una función inyectiva se cumple que **si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces, $x_1 = x_2$.**

Ya que si dos imágenes son iguales, entonces la preimagen debe ser el mismo número.

Aplicamos lo anterior a f y g:

$$f(x_1) = f(x_2)$$
$$x_1^2 = x_2^2$$
$$x_1^2 - x_2^2 = 0$$
$$(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0$$

De donde:

$$(x_1 + x_2) = 0 \text{ o } (x_1 - x_2) = 0$$
$$x_1 = -x_2 \text{ o } x_1 = x_2$$

$$g(x_1) = g(x_2)$$
$$3x_1 - 1 = 3x_2 - 1$$
$$3x_1 = 3x_2$$
$$x_1 = x_2$$

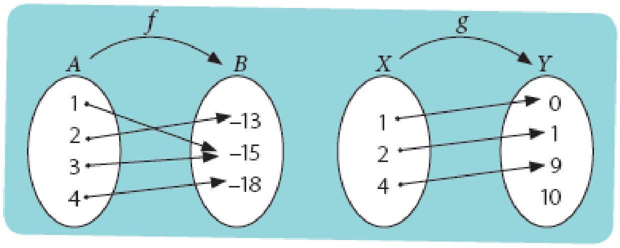
¿Lo entiendes?
Explica los pasos realizados en cada demostración.

En el caso de g obtuvimos que si dos imágenes son iguales entonces las preimágenes deben ser iguales. En cambio, en el caso de f, podemos ver que si dos imágenes son iguales entonces también puede cumplirse que un elemento del dominio sea el opuesto de otro, por ejemplo, $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$. Luego, la función f no es inyectiva.

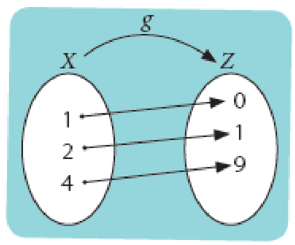
¿Lo entiendes?

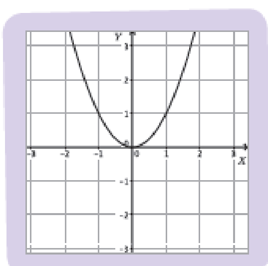
La función del contexto inicial, ¿es sobreyectiva? Argumenta.

Una **función f** es **sobreyectiva** cuando el recorrido de la función es igual al codominio, es decir, cuando todos los elementos del conjunto de llegada son imagen de por lo menos un elemento del dominio; por ejemplo, en las funciones cuyas representaciones sagitales están dibujadas a continuación tenemos que $f: A \longrightarrow B$ es una función sobreyectiva ya que $Rec\, f = B$. Por otro lado, la función $g: X \longrightarrow Y$ no es sobreyectiva ya que hay elementos del conjunto de llegada que no son imágenes de ningún número, en este caso, el 10.



Como g no es sobreyectiva podemos redefinir el codominio para que sí lo sea; por ejemplo, si definimos el conjunto $Z = Y - \{10\}$, tenemos que la función $g: X \longrightarrow Z$ es sobreyectiva ya que todo elemento de Z es imagen de algún elemento del dominio. Observa.





¿Cómo hacerlo?

Determina si la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^2$ es sobreyectiva.

Si te fijas en la gráfica de f, que se muestra a la izquierda, tenemos que $rec\, f = \mathbb{R}^+_0$, ya que los valores que toma y son todos los números reales positivos y el 0. Luego, como el codominio de la función es el conjunto de los números reales, tenemos que

$$rec\, f \neq \mathbb{R}$$

Por lo tanto, la función no es sobreyectiva.

¿Cómo hacerlo?

Redefine el codominio de la función $f(x) = x^2$ de modo que f sea una función sobreyectiva.

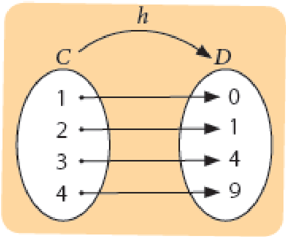
En el ejemplo anterior observaste que $rec\, f = \mathbb{R}^+_0$

Por lo tanto, si el codominio es el conjunto $\mathbb{R}^+_0$, entonces la función es sobreyectiva. Luego, podemos definir f como:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+_0$$

En este caso la función $f(x) = x^2$ es sobreyectiva pues $rec\, f = codom\, f = \mathbb{R}^+_0$

Una función f es **biyectiva** si es **inyectiva** y **sobreyectiva** a la vez, es decir, cuando todos y cada uno de los elementos del codominio son imagen de solo un elemento del dominio; por ejemplo, sea la función $h: C \longrightarrow D$ cuya representación es la siguiente:



Se tiene que la función h es biyectiva porque cada elemento del codominio D es imagen de solo un elemento del dominio C, es decir, h es inyectiva y sobreyectiva.

¿Lo entiendes?

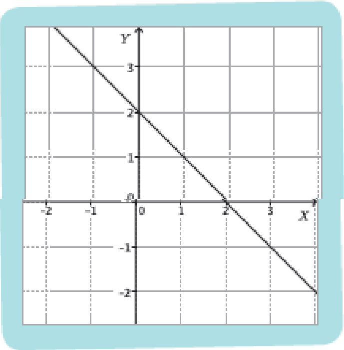
La función del contexto inicial, ¿es biyectiva? Argumenta.

¿Cómo hacerlo?

Determina si la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = 2 - x$ es biyectiva.

Para saber si la función f es biyectiva debemos verificar que sea inyectiva y sobreyectiva a la vez.

Si te fijas en la gráfica, cualquier recta horizontal interseca a la gráfica de la función en un solo punto. Por lo tanto, la función es inyectiva.



Por otro lado, a partir de la gráfica también podemos concluir que el recorrido de la función son todos los números reales, de modo que el recorrido es igual que el codominio, por lo tanto, la función es sobreyectiva.

Finalmente, como f es inyectiva y sobreyectiva, entonces f es biyectiva.

¿Lo entiendes?

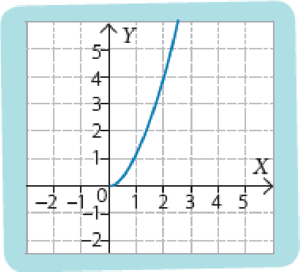
Demuestra algebraicamente que f es inyectiva.

¿Cómo hacerlo?

Redefine el dominio y el codominio de la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^2$, de modo que f sea una función biyectiva.

Como ya hemos analizado, la función $f(x) = x^2$ no es ni inyectiva ni sobreyectiva.

Para lograr que la función cuadrática sea inyectiva podemos considerar únicamente una de sus ramas. Por ejemplo, la rama de la derecha, tal como se muestra en la figura. En este caso, el dominio de la función son todos los números reales positivos y el 0, es decir, $dom\ f = \mathbb{R}^+_0$.



A partir del dominio definido anteriormente podemos determinar el recorrido de la función. Luego, $rec\ f = \mathbb{R}^+_0$.

Finalmente, para que la función sea sobreyectiva, su recorrido debe ser igual que el codominio. Por lo tanto, el codominio debe ser el conjunto de todos los números reales y el 0. En resumen, la función $f: \mathbb{R}^+_0 \longrightarrow \mathbb{R}^+_0$, definida como $f(x) = x^2$ es biyectiva.